

شکر فراوان ایزد یکتا را که آدمی را به کامل ترین وجه آفریده، برای هدایت او پیامبران را فرستاد. درود بی پایان بر آخرین فرستاده او محمد(ص)، سلام بر امامان معصوم(ع)، با آرزوی ظهور آخرین آن‌ها حضرت قائم(عج).

پیشگفتار

امروزه در دنیای اقتصاد و مدیریت در حوزه‌های مالی^۱، کسب و کار و بورس‌ها به سرعت رشد و تغییرات زیادی ایجاد شده است. این تغییرات سریع به واسطه ابزارهای مالی مدرن^۲ پدید آمده، که در ضمن بسیار پیچیده‌اند. برای به کارگیری این ابزارهای جدید، فرایندهای تصادفی مورد نیاز است. با استفاده از فرایندهای تصادفی و ریاضیات انواع قیمت گذاری‌ها انجام می‌شود. این مجموعه را برخی ریاضیات مالی^۳ می‌نامند. ریاضیات مالی را می‌توان شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی دانست. بین ریاضیات مالی و محاسبات مالی^۴ و مهندسی مالی^۵ هم‌پوشانی زیادی وجود دارد. مهندسی مالی از رشته‌های سنتی مهندسی نیست و این اصطلاح اولین بار در اوایل دهه ۱۹۸۰ در بانک‌های انگلیس برای تیمی که در زمینه‌های ریسک کار می‌کردند، به کار گرفته شد. انجمن بین‌المللی مهندسی مالی (IAFE)، مهندسی مالی را به این صورت تعریف می‌کند: مهندسی مالی عبارت است از توسعه و به کارگیری خلاقانه فناوری‌های مالی برای حل مسائل مالی و استفاده از فرصت‌های مالی.

برای ارائه ریاضیات مالی یا مهندسی مالی از فرایندهای تصادفی و کاربردهای آن مانند انتگرال تصادفی و معادلات دیفرانسیل تصادفی استفاده می‌شود. به همین دلیل برخی از مؤلفان

-
1. finance
 2. modern financial instruments
 3. financial mathematics
 4. computational finance
 5. financial engineering
 6. International Association Financial Engineering

آن را حسابان تصادفی^۱ می‌نامند. خوانندگان ارجمند با حسابان معمولی که همان حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد، آشنایی کامل دارند. در حسابان معمولی، متغیرها متعین یا غیر تصادفی است و در حسابان تصادفی اساس کار فرایندهای تصادفی اند و به همین دلیل برخی آن را فرایند تصادفی و کاربردهای آن نام نهاده‌اند. در حسابان معمولی، با مفاهیم متغیر، تابع، مشتق، انتگرال، معادلات دیفرانسیل آشنا شده و به کاربردهای آن در رشته‌های مختلف از جمله مدیریت و اقتصاد پی برده‌ایم. نظیر همین سرفصل‌ها در حسابان تصادفی وجود دارد. مهم‌ترین بخش در حسابان تصادفی فرایندهای تصادفی گسسته و پیوسته است که به کمک فرایندهای تصادفی، انتگرال تصادفی و معادلات دیفرانسیل تصادفی تبیین می‌شود و می‌توان در بازارهای سرمایه و بیمه به تحلیل و قیمت‌گذاری انواع سهام، اختیارها، قراردادهای آتی، معاوضه و غیره پرداخت. به علت کاربرد فراوان آن این کتاب را فرایندهای تصادفی پیشرفته و کاربردهای آن در اقتصاد، مدیریت و مهندسی مالی نامیده‌ام.

تألیف این کتاب ثمره تجربه تدریس این مطالب در سال‌های مختلف در دانشگاه‌های شهید بهشتی، تهران، علامه طباطبایی، امام صادق (ع) و پیام نور در رشته‌های مهندسی مالی، مدیریت مالی، مدیریت صنعتی و اقتصاد در دوره‌های تحصیلات تکمیلی است. از کتاب‌ها و مقالات زیادی نیز سود برده‌ام، که در فهرست منابع آمده است. برای بیان فرایندهای تصادفی نیاز کامل به مفاهیم احتمال داریم. به همین دلیل در بیشتر کتاب‌های موجود در این زمینه، ابتدا مروری مختصر بر نظریه احتمال ارائه شده است.

قابل ذکر است در فصل اول به اختصار مروری بر نظریه احتمال خواهیم داشت. ابتدا به تعاریف اساسی، از جمله جبر-زیگما یا ساختار اطلاعاتی و اندازه احتمال، فضای احتمال و متغیرهای تصادفی با توجه به بیان‌های جدید معمول دنیا خواهیم پرداخت. سپس چند توزیع خاص از جمله توزیع‌های یک متغیره و چندمتغیره را که مورد نیاز است بیان خواهیم کرد. در پایان، توزیع‌های شرطی را یادآور می‌شویم.

در فصل دوم، ابزارهای مالی و بازارهای مالی موجود در جهان معرفی می‌گردد. ابزارهای مالی را می‌توان به دو دسته اوراق قرضه و قراردادهای مالی تقسیم کرد. ابتدا اوراق قرضه و انواع آن را مطرح می‌کنیم. سپس به معرفی سهام می‌پردازیم. در بخش بعد درباره مشتقات بحث می‌کنیم، مشتقات ابزارهایی مالی هستند که بازدهی آن‌ها به ارزش دیگر متغیرهای مالی (قیمت سهم، قیمت ورقه قرضه، نرخ ارز و غیره) که متغیرهای بنیادی نامیده می‌شوند، بستگی دارد. از جمله مشتقات،

قراردادهای آتی، پیمانهای آتی و انواع اختیارهای خرید و فروش می‌باشند. در بازارهای مالی جهان، اختیارها علاوه بر پوشش ریسک، از نظر سرمایه‌گذاری با اهمیت‌اند. نوع دیگری از قرارداد مشتقه که به طور گسترده به کار می‌رود قرارداد معاوضه یا سوآپ است. اوراق بهادار دیگری با ویژگی‌های خاص وجود دارند که آنها را به ابزار مشتقه شبیه می‌سازند. در این فصل به دو نوع از آنها اشاره خواهیم کرد. آنگاه، سازمان بازارهای مالی را معرفی می‌کنیم. سازمان بازارهای مالی در بسیاری از کشورها به لحاظ اساس ساختاری تفاوتی با هم ندارند. بازارهای مالی در ایالات متحده از جمله پیشرفته‌ترین بازارهای مالی هستند که اشاره‌ای به آنها خواهیم داشت. شاخص‌های بازار بسیار با اهمیت است و هزاران اوراق بهادار و قرارداد در بورس‌های مختلف پذیره‌نویسی می‌شوند. به منظور خلاصه‌سازی اطلاعات موجود در قیمت‌های آنها، شاخص‌های بازار بسیاری وجود دارد. یک شاخص به دنبال آن است تا در قالب یک عدد، خلاصه‌ای از سطح بازارها یا زیرمجموعه‌های بازارها را بیان کند. در ادامه به تعدادی از آنها اشاره خواهیم کرد. سپس مختصری به تشکیل بورس در ایران و شاخص‌های آن پرداخته، در پایان مفهوم آریترایژ را بیان می‌کنیم.

در فصل سوم فرایندهای تصادفی زمان - گسسته و انواعی از آن معرفی می‌شود. ابتدا به تعریف فرایندهای تصادفی در یک فضای احتمال فیلترشده و خواص عمومی آنها و سپس به انواع مهم فرایندهای تصادفی می‌پردازیم. گام برداری یا گام تصادفی که یکی از فرایندهای تصادفی جداساز و در مدل‌سازی قیمت سهام به کار می‌رود، تعریف می‌شود. برخی از فرایندهای تصادفی زمان - گسسته زنجیرهای مارکف هستند که این زنجیرها معرفی و مثال‌های کاربردی از آنها معرفی می‌شود. تعدادی از فرایندهای تصادفی جدا مارتنگل هستند که در این فصل این متغیرهای تصادفی نیز معرفی و کاربرد آنها در مهندسی مالی تشریح می‌شود. در ادامه درباره قیمت‌گذاری اختیار با استفاده از مدل‌های دو جمله‌ای یک دوره‌ای و چند دوره‌ای اعم از اختیار اروپایی و امریکایی به طور کامل بحث می‌شود.

در فصل چهارم فرایندهای تصادفی زمان - پیوسته تشریح و حرکت براونی، مهم‌ترین فرایند تصادفی پیوسته، معرفی می‌شود. این فرایند تصادفی برای بیان فصول بعدی کتاب ضروری است. آنگاه فرایند تصادفی پواسون و فرایند تصادفی مرکب تشریح و به کمک آن حرکت براونی بیان می‌شود. فرایندهای تصادفی پیوسته نیز ممکن است دارای خاصیت مارتنگل باشند که این خاصیت نیز بحث می‌شود. فرایندهای تصادفی پیوسته کاربردهای فراوانی در اقتصاد، مدیریت و مهندسی مالی دارد که در فصل مربوط به آن خواهیم پرداخت. موضوع فصل پنجم انتگرال‌گیری تصادفی است، که به کمک فرایندهای تصادفی

از جمله حرکت براونی تعریف می‌شود. ابتدا انتگرال ایتو که شباهت به انتگرال استیلتیس در آنالیز ریاضی دارد، تعریف و دربارهٔ خواص آن بحث می‌شود. سپس انتگرال استراتونویچ که در بیمه کاربرد دارد و محاسبهٔ آن معرفی می‌گردد. این انتگرال‌ها در مهندسی مالی، بیمه و اقتصاد ریاضی کاربردهای جالبی دارند. اساس معادلات دیفرانسیل تصادفی و کنترل تصادفی مبتنی بر انتگرال‌های تصادفی است. این کاربردها را در فصول بعد ملاحظه خواهید کرد.

خوانندگان این کتاب قطعاً با معادلات دیفرانسیل معمولی آشنایی دارند و چون در حسابان تصادفی با معادلات دیفرانسیل تصادفی مواجه می‌شویم، بنابراین در فصل ششم به آن می‌پردازیم. ابتدا این معادلات را تعریف و شرایط وجود جواب را بیان می‌کنیم. سپس معادلات با ضرایب ثابت و متغیر را حل می‌نماییم. فرمول ایتو که بسیار اهمیت دارد در این فصل معرفی و کاربردهای آن در حل معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی ارائه می‌شود. گاهی برای حل برخی از مسائل به فرمول ایتوی دو متغیره نیاز است، که به جای استفاده از آن از فرمول ساده‌تری که موسوم به انتگرال جزء به جزء تصادفی است، استفاده می‌شود. بنابراین اثبات و کاربرد آن را در حل معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی ملاحظه خواهید کرد. معادلات دیفرانسیل تصادفی به صورت گسترده در مدل‌سازی ابزارهای پیشرفتهٔ مالی و کنترل تصادفی در رشته‌های مالی و اقتصاد به کار می‌رود. برای نمونه معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی که بلک-شولز برای ارائهٔ مدل خود از آن استفاده کرده‌اند بیان شده است، از این معادله برای برآورد قیمت سهام با فاصلهٔ اطمینان مورد نظر استفاده می‌شود. معادلهٔ دیفرانسیل دیگری که در تعیین نرخ بهره و سرمایه‌گذاری به کار می‌رود، مدل واسیچک است که به آن نیز اشاره می‌شود.

در فصل هفتم، کاربرد انتگرال ایتو و معادلات دیفرانسیل تصادفی در مهندسی مالی بحث می‌شود. در این فصل ابتدا به برآورد فاصلهٔ قیمت سهام می‌پردازیم و سپس مدل بلک-شولز و قیمت‌گذاری اختیار معاملات را مطرح می‌کنیم. در اوایل دههٔ هفتاد میلادی مایرون شولز، رابرت مرتون و فیشر بلک به پیشرفت مهمی در زمینهٔ قیمت‌گذاری ابزارهای مالی پیچیده به وسیلهٔ توسعهٔ آنچه به عنوان مدل بلک-شولز معروف شد، دست یافتند. در سال ۱۹۹۷ اهمیت این مدل به واسطهٔ دریافت جایزهٔ نوبل اقتصاد به وسیلهٔ مایرون شولز و رابرت مرتون در سطح جهان نمودار گشت. متأسفانه فیشر بلک در سال ۱۹۹۵ فوت کرده بود. مدل بلک-شولز نشان می‌دهد که فرایندهای تصادفی و ریاضیات مطرح شده در حسابان تصادفی نقش مهمی در رشتهٔ مالی دارد. اثبات مدل بلک-شولز که قیمت‌گذاری اختیار معاملات سهام است، این موضوع را به خوبی نشان می‌دهد. فرمول اثبات شده برای تعیین قیمت اختیار خرید و فروش

سهامی است که سود پرداخت نمی‌کنند. لذا فرمولی برای اختیار سهامی که سود می‌پردازند را در این فصل به دست می‌آوریم؛ آنگاه محاسبهٔ قیمت اختیار برای ارزها را ارائه می‌دهیم. فرمول بلک‌اسکول برای قیمت‌گذاری حق اختیار فروش سهام است. در این بخش ارزش اختیار برای قراردادهای آتی و پیمان‌های آتی را نیز محاسبه می‌کنیم.

در فصل هشتم کنترل تصادفی که در اقتصاد ریاضی و مدیریت پیشرفته کاربرد دارد، مطرح و سپس روش اصل ماکزیمم بحث می‌شود. ابتدا به کنترل غیر تصادفی پرداخته، آن را به روش برنامه‌ریزی پویا، یعنی معادلهٔ بلمن، ارائه می‌دهیم. ممکن است مسئلهٔ کنترل با ناطمینانی و متغیرهای تصادفی همراه باشد. به طور معمول ما با ناطمینانی روبه‌رو هستیم، مثلاً مصرف‌کنندهٔ نامطمئن به عنوان مشتری یا ناطمینانی در سرمایه‌گذاری مانند خرید سهام، که در این موارد ما با یک توزیع احتمال آشنا یا ناشناخته از یک متغیر وضعیت و گاهی تابعی از یک متغیر وضعیت به عنوان یک متغیر تصادفی روبه‌رو می‌شویم. این وضعیت به صورت گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف به کار می‌رود. به علاوه، مدل‌های تصادفی امروزه در اقتصاد مالی برای مدل‌سازی استفاده می‌شود. در این بخش، مسئلهٔ کنترل تصادفی تعریف و سپس روش حل آن که شباهتی کامل به روش برنامه‌ریزی پویا دارد معرفی می‌شود. معادلهٔ بلمن در حالت تصادفی اثبات و روش حل آن تبیین می‌گردد و مقالاتی در این زمینه ارائه می‌شود.

برای درک بهتر مطالب در هر فصل مسائلی به عنوان مثال ارائه و حل شده است؛ لذا به خوانندگان این کتاب توصیه می‌کنیم به مثال‌های حل شده در هر فصل توجه و سپس تمرین‌های انتهایی هر فصل را حل کنند. در ضمن در انتهای هر فصل خلاصهٔ مطالب فصل و همچنین کتاب‌هایی برای مطالعه بیشتر ارائه شده است.

در پایان لازم می‌دانم از مسئولان محترم سازمان «سمت»، به ویژه آقای دکتر مرتضی عزتی، که در چاپ این کتاب مساعدت کردند، خانم‌ها عادلہ مشایخی، ویراستار کتاب، و مریم سمیاری، که حروفچینی آن را بر عهده داشتند، صمیمانه تشکر نمایم.

از خوانندگان محترم تقاضا دارم که اینجانب را از دیدگاه‌های ارزشمند و منتقدانهٔ خود در اصلاح و ارتقای کتاب برخوردار نمایند. در پایان خداوند بزرگ را سپاسگزارم که توفیق تألیف این کتاب را به من عطا فرمودند.

محمد حسین پورکاظمی

عضو هیئت علمی دانشکدهٔ علوم اقتصادی دانشگاه شهید بهشتی

فروردین ۱۳۹۸